

Zastosowanie twierdzenia Fedorova w tomografii kwantowej

Artur Czerwiński ¹

¹ *Instytut Fizyki; Wydział Fizyki, Astronomii i Informatyki Stosowanej; Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu*

Powszechnie wiadomo, że opisujące ewolucję otwartego układu kwantowego równanie z generatorem Goriniego-Kossakowskiego-Sudarshana posiada proste rozwiązanie w formie eksponencjalnej [1]. Dużo bardziej skomplikowanym zadaniem z matematycznego punktu widzenia jest rozwiązanie równania ewolucji macierzy gęstości $\rho(t)$ z generatorem zależnym od czasu: $\dot{\rho}(t) = \mathbb{L}(t)[\rho(t)]$. Istnieją proste rozwiązania analityczne w sytuacjach, kiedy generator $\mathbb{L}(t)$ spełnia pewne szczególne warunki (jak na przykład funkcjonalna komutowalność).

Umiejętność rozwiązywania równania ewolucji układu kwantowego jest niezbędna w tzw. dynamicznym podejściu do tomografii kwantowej. W ogólności zagadnienie tomografii odnosi się do problemu rekonstrukcji początkowej macierzy gęstości na podstawie danych możliwych do uzyskania z eksperymentu. W dynamicznym podejściu zakłada się, że mając do dyspozycji pewną liczbę identycznych układów kwantowych, każdemu z nich pozwala się ewoluować i dokonuje się pomiarów w różnych momentach. Okazuje się, że przy tym podejściu można dokonać rekonstrukcji stanu kwantowego przy mniejszej liczbie różnych wielkości mierzalnych niż w przypadku statycznym. Podejście dynamiczne do tomografii kwantowej jest dobrze opisane dla układów z ewolucją daną generatorem GKS – po raz pierwszy zaproponowane zostało w pracy [2], a potem rozwinięte w innych artykułach jak na przykład [3].

Jednym z mało znanych twierdzeń, które mówi o rozwiązywalności równania w formie $\dot{\rho}(t) = \mathbb{L}(t)[\rho(t)]$, jest twierdzenie Fedorova. Oznaczając $B(t) = \int_0^t \mathbb{L}(\tau)d\tau$, twierdzenie Fedorova można sformułować w sposób następujący.

Twierdzenie Fedorova. Jeśli generator ewolucji spełnia dla pewnego stałego wektora α równanie:

$$[\mathbb{L}(t), B^n(t)]\alpha = 0 \quad n = 1, 2, \dots$$

to rozwiązanie równania $\dot{\rho}(t) = \mathbb{L}(t)[\rho(t)]$ ma postać: $\rho(t) = \exp\{B(t)\}\alpha$.

Twierdzenie Fedorova umożliwia więc znalezienie rozwiązania równania ewolucji dla pewnej podprzestrzeni stanów początkowych. Dzięki uzyskaniu rozwiązania w postaci eksponencjalnej możliwe jest zastosowanie do takich ewolucji dynamicznego podejścia do tomografii kwantowej. W ramach plakatu zaprezentowany zostanie dowód twierdzenia Fedorova, w drugiej części dla wybranego konkretnego przypadku zależnego od czasu generatora zostanie pokazana procedura rozwiązywania równania ewolucji przy użyciu twierdzenia Fedorova, a na koniec zastosowana zostanie metodologia tomografii stroboskopowej w celu określenia kryteriów, według których możliwa jest rekonstrukcja stanu początkowego. Zastosowanie podejścia dynamicznego do układów z ewolucją daną generatorem zależnym od czasu jest naturalnym uogólnieniem procedury tomografii stroboskopowej stosowanej pierwotnie do układów z generatorem od czasu niezależnym [2].

[1] V. Gorini, A. Kossakowski, E. C. G. Sudarshan, J. Math. Phys. **17**, 821 (1976).

[2] A. Jamiołkowski, Int. J. Theor. Phys. **22**, 369 (1983).

[3] A. Czerwiński, Int. J. Theor. Phys., **55**, 658 (2015).