

# Równowaga Heidera w sieciach dwuwarstwowych

Piotr J. Górski<sup>1</sup>, Krzysztof Kułakowski<sup>2</sup>, Przemysław Gawroński<sup>2</sup>,  
Janusz A. Hołyst<sup>1,3</sup>

<sup>1</sup>Wydział Fizyki, Politechnika Warszawska, ul. Koszykowa 75, 00-662 Warszawa, Polska

<sup>2</sup>Wydział Fizyki i Informatyki Stosowanej, Akademia Górniczo-Hutnicza,  
al. Mickiewicza 30, 30-059 Kraków, Polska

<sup>3</sup>Uniwersytet ITMO, 19 Kronverkskiy av., 197101 Sankt Petersburg, Rosja

W sieci społecznej relacje przyjaźni i wrogości opisuje się poprzez nadanie krawędom dodatnich i ujemnych wag. Zgodnie z teorią równowagi społecznej Heidera [1] te relacje zmieniają się w celu uzyskania układu zbalansowanych triad węzłów. Triada jest zrównoważona, kiedy są spełnione cztery aksjomaty: (1) „przyjaciel mego przyjaciela jest moim przyjacielem”, (2) „przyjaciel mego wroga jest moim wrogiem”, (3) „wróg mego przyjaciela jest moim wrogiem” i (4) „wróg mego wroga jest moim przyjacielem”.

W niniejszej pracy zaproponowaliśmy nowy rodzaj struktury sieci wielowarstwowej — krawędziowy multipleks, w którym międzywarstwowe linki łączą nie odpowiadające sobie węzły, ale odpowiadające sobie krawędzie należące do różnych warstw. Podjęliśmy zagadnienie powstawania równowagi Heidera w układzie dwuwarstwowym [2, 3]. Względna siła sprzężenia pomiędzy warstwami jest modelowana za pomocą pary dodatnich lub ujemnych współczynników ( $\beta_1, \beta_2$ ). Struktura połączeń wewnątrz każdej warstwy tworzy pełny graf ważony. Wagi krawędzi są ciągle w granicach  $(-1, +1)$ . Dynamika układu jest dynamiką linków. Przyjęty układ równań różniczkowych powoduje dynamiczną ewolucję wag krawędzi. Każda waga zmienia się wskutek oddziaływania z sąsiednimi linkami z tej samej warstwy oraz z odpowiadającą krawędzią — repliką — z warstwy drugiej.

Istnieją dwa procesy decydujące o dynamice układu: (1) tendencja do utworzenia struktury będącej w równowadze Heidera i (2) tendencja do utworzenia ferromagnetycznej lub antyferromagnetycznej struktury złożonej z warstw, w których odpowiadające sobie krawędzie są odpowiednio takie same lub przeciwne. Zmiany wag linków prowadzą do trzech typów rozwiązań: (1) rozwiązania niestacjonarnego, (2) rozwiązania stacjonarnego z równowagą Heidera i (3) rozwiązania stacjonarnego bez równowagi Heidera. Na diagramach współczynników sprzężenia ( $\beta_1, \beta_2$ ) istnieją fazy, gdzie tylko jeden typ rozwiązania jest obserwowany, oraz istnieją regiony przejściowe, gdzie zaobserwowano dwa typy rozwiązań. Na przykład, gdy oba współczynniki sprzężenia są wystarczająco silne, ale o przeciwnych znakach, w układzie zawsze występują oscylacje (faza rozwiązań niestacjonarnych).

Wyniki numeryczne i analityczne wskazują, że sprzężenie międzywarstwowe utrudnia otrzymanie układu zrównoważonego w sensie Heidera. Otrzymane wyniki składają się z bogatych diagramów parametrów modelu, które pozwalają zidentyfikować regiony współczynników sprzężenia prowadzące z wysokim prawdopodobieństwem do równowagi Heidera.

Praca była współfinansowana z projektu Unii Europejskiej *Horizon 2020 research and innovation programme under the Marie Skłodowska-Curie* numer grantu No 691152 (projekt RENOIR) i z projektu Narodowego Centrum Nauki, numer grantu 2015/19/B/ST6/02612.

[1] F. Heider, *The Psychology of Interpersonal Relations* (Psychology Press, 1958).

[2] K. Kułakowski, P. Gawroński, P. Gronek, *Int. J. Mod. Phys. C* **16**, 707 (2005).

[3] P.J. Górski, K. Kułakowski, P. Gawroński, J.A. Hołyst, w przygotowaniu do publikacji.